CONCURSUL JUDEȚEAN
"Trepte în matematică și comunicare" Memorial FLORIAN PANĂ
Ediția a XX-a, 16 mai 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE_____Clasa a IX-a (M_1 Mate-info)

Subiectul I (20p)

1. Fie trapezul $ABCD$ şi punctul E din planul trapezului astfel încât $\sphericalangle(BAD)\equiv\sphericalangle(DA\mathrm{E})$ şi $\sphericalangle(CDA)=\sphericalangle(\mathrm{E}DA)$. Arătaţi că $(\forall)M\in[AB]$, $(\forall)N\in[CD]$ şi respectiv $P\in[D\mathrm{E}]$, $Q\in[\mathrm{E}A]$, cu $[BM]\equiv[\mathrm{E}Q]$ şi $[CN]=[\mathrm{E}P]$, mijloacele segmentelor $[MQ]$, $[B\mathrm{E}]$, $[C\mathrm{E}]$ şi $[NP]$ sunt coliniare.

Soluție:

Dacă $AB\|CD$ nu există punctul E. Deci $AD\|BC$ 1p

Cu notațiile F,G,H,I mijloacele segmentelor $[MQ],[B\mathrm{E}],[C\mathrm{E}]$ şi $[NP]$ şi $\{R\}=AD\bigcap B\mathrm{E}$, $\{T\}=DA\bigcap C\mathrm{E}$

Arătăm că $FG\|AR$. Luăm $AB=a, A\mathrm{E}=e$ şi $BM=\mathrm{E}Q=x$.

Deci $\overrightarrow{MB}=\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}$ (1), $\overrightarrow{Q\mathrm{E}}=\frac{x}{e}\overrightarrow{A\mathrm{E}}$ (2) şi $\overrightarrow{AR}=\frac{e\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{A\mathrm{E}}}{a+e}$ (3) (ca bisectoare în $\triangle BA\mathrm{E}$). 4p

În $\triangle BF\mathrm{E}$, cu relaţia medianei, $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{F\mathrm{E}}\right)$ (4). 2p

Cum $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{FM}$ şi $\overrightarrow{F\mathrm{E}}=\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{Q\mathrm{E}}$ şi din (4) avem: $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{Q\mathrm{E}}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{Q\mathrm{E}}\right)$ (5). ....2p.

Din (1), (2) şi (5) deducem: $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{e}\overrightarrow{A\mathrm{E}}\right)=\frac{x}{2}\cdot\frac{e\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{A\mathrm{E}}}{ae}=\ =\frac{x(a+e)}{2ae}\cdot\frac{e\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{A\mathrm{E}}}{a+e}$ (6). 2p

Luăm $\frac{x(a+e)}{2ae}=k\ \Rightarrow\overrightarrow{FG}=k\overrightarrow{AR}$ adică $FG\|AR\ \Rightarrow FG\|AD$ (7). 1p

Analog: $HI\|AD$ (8). Cum $GH\|BC$ (linie mijlocie) avem $GH\|AD$ (9). 2p

Din ultimele trei relaţii rezultă că F,G,H,I sunt puncte coliniare.....1p

2. Să se arate că pentru $x\in[0,\pi]$ expresia $E(x)=\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi-x}{3}}+\frac{\cos x}{\cos\frac{\pi-x}{3}}$ nu depinde de x .

Soluție:

Expresia se restrânge : $E(x)=\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi-x}{3}\right)}{\sin\frac{2\pi-2x}{3}}$ 3p

$x+\frac{\pi-x}{3}+\frac{2\pi-2x}{3}=\pi$ deci $E(x)=2$.....2p

Subiectul al II-lea (25p)

1. Să se arate că, pentru orice pereche $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$, cel puțin una din ecuațiile: $bx^2+2ax+2a=0$, $ax^2-bx+a-2b=0$ are rădăcini reale.

Soluție:

$\Delta_1=4a^2-8ab$ 3p

$\Delta_2=b^2-4a^2+8ab$.....3p

$\Delta_1+\Delta_2>0$ 2p

Finalizare 2p

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1=a_2=2$ și $a_{n+1}=7a_n-12a_{n-1}$, $(\forall)\ n\geq2$. Aflați x și y reale și demonstrați prin inducție că $a_n=x\cdot3^n+y\cdot4^n$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$. Apoi calculați suma $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$.

Soluție:

n=1 și n=2 în relația de recurență $\Rightarrow\ x=2,\ y=-1$ 6p

$a_n = 2\cdot3^n - 4^n$. Demonstrează prin inducție $a_n = 2\cdot3^n - 4^n$; verificare pentru n=1 și n=2.....2p

Presupun adevărat pentru n și n-1și arată $a_{n+1} = 2\cdot3^{n+1} - 4^{n+1}$ 2p

$S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot3^k - 4^k\right)$ 2p

Cu formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice se obține $S_n = \frac{3^{n+2} - 4^{n+1} - 5}{3}$ 3p